Titres et travaux scientifiques

de Henri CARTAN

Mai 1938

I - CURRICULUM VITAE

Né à Nancy	8 juillet 1904
Elève à l'Ecole Normale Supérieure	1923-26
Agrégé des Sciences Mathématiques	1926
Boursier de doctorat (Arconati-Visconti)	1926-28
Docteur ès-Sciences	1928
Professeur au Lycée de Caen	Oct.1928-Avril 29
Chargé de cours à la Faculté des Sciences de Strasbourg	Avril 29- Sept.29
Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Lille	Oct.1929 - Sept.31
Chargé de Cours, puis Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Strasbourg	Oct.1931 - Déc. 35
Professeur de Mathématiques Générales à la Faculté des Sciences de Strasbourg	Depuis Janvier 1936

Chargé de recherches à la Caisse Nationale des Sciences	1931 - 35
Chargé du cours de la Fondation Peccot au Collège de France	1933
Prix Bordin	1935
Membre du Jury du Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure	1938

II. PUBLICATIONS

A- Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

(1) Sur quelques théorèmes de M.R. Nevanlinna (185, 1927, p. 1253)
(2) Sur un théorème de M.A. Bloch, et sur les questions d'unicité dans la théorie des fonctions méromorphes (186, 1928, p.624)
(3) Un nouveau théorème d'unicité relatif aux fonctions méromorphes (188, 1929, p. 301)
(4) Sur la croissance des fonctions méromorphes d'une ou de plusieurs variables complexes (188, 1929, p. 1374)
(5) Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions d'une variable (189, 1929, p. 521)
(6) Sur la dérivée par rapport à log r de la fonction de croissance T (r;f) (189, 1929, p. 625)
(7) Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions entières données (189, 1929, p. 727)
(8) Les fonctions de deux variables complexes et les domaines cerclés de M. Carathédory (190, 1930, p. 354)
(9) Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres (190, 1930, p. 718)
(10) Sur les valeurs exceptionnelles d'une fonction méromorphe dans tout le plan (190, 1930, p. 1003)
(11) (en collaboration avec M. Elie Cartan) Les transformations des domaines cerclés bornés (192, 1931, p. 709)
(12) Les transformations des domaines semi-cerclés bornés (192, 1931 p. 869)
(13) Sur une classe remarquable de domaines (192, 1931, p. 1077)
(14) Sur les groupes de transformations pseudo-conformes (196, 1933, p. 669)
(15) Sur les groupes de transformations pseudo-conformes (196, 1933, p. 993)
(16) Sur les transformations pseudo-conformes du produit topologique de deux domaines (199, 1934, p. 925)
(17) Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes (199, 1934, p. 1284)
(18) Théorie des filtres (205, 1937, p. 595)
(19) Filtres et ultrafiltres (205, 1937, p. 777).

B- Mémoires originaux.

(20) Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires, etc... (Thèse, Ann. de l'Ecole Normale, 3e série, 45, 1928, p. 255-346)
(21) Sur les fonctions de deux variables complexes (Bull. Sciences Math. 54, 1930, p. 99-116)
(22) Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique (Journal de Math., 9e série, 10, 1931, p. 1-114)
(23) Sur les fonctions de deux variables complexes : les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D (Bull. Soc. Math. de France, 58, 1930, p. 199-219)
(24) Sur les variétés définies par une relation entière (Bull.Sciences Math., 55, 1931, p. 24-32 et p. 47-64).

(25) Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes (Bull. Soc. Math.de France, 59, 1931, p. 46-69)

(26) Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés (Math. Annalen, 106, 1932, p. 540-573)

(27) Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, etc... (en commun avec P. Thullen, Math. Annalen, 106, 1932, p. 617-647)

(28) Sur les fonctions de plusieurs variables complexes : l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné (Math. Zeitschrift, 35, 1932, p. 760-773)

(29) Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données (Mathematica, 7, 1933, p. 5-29)

(30) Sur les transformations localement topologiques (Acta litterarum ac scientiarum, 6, 1933, p. 85-104)

(31) Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variable complexes (Bull. Sciences Math., 57, 1933, p. 333-344)

(32) Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes (Compositio Mathematica, 1, 1934, p. 223-227)

(33) Sur les groupes de transformations analytiques (collection d'exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, fascic. 9, 1935; à Paris, chez Hermann)

(34) Sur les fonctions de n variables complexes : les transformations du produit topologique de deux domaines bornés (Bull. Soc. Math. de France, 64, 1936, p. 37-48).

C- Divers.

(35) Les transformations analytiques et les domaines convexes (note au Congrès de l'Assoc. Française pour l'avancement des sciences Nancy 1931)

(36) Sur les transformations pseudo-conformes des domaines cerclés bornés (communication au Congrès International des Mathématiciens Zurich 1932)

(37) Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la Théorie des fonctions univalentes (Note de 26 pages en appendice au livre de P. Montel, intitulé " Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes ", Collection Borel, Gauthier-Villars 1933).

III. - EXPOSE DES TRAVAUX

Mes premiers travaux, et parmi eux ma Thèse faite en 1928 sous la direction de M. Paul Montel, se rapportent aux fonctions analytiques d'une variable complexe. Mais, sous l'influence d'un Mémoire de C. Carathéodory, je me mis dès 1930 à l'étude des fonctions de plusieurs variables complexes, à peu près délaissée en France depuis Poincaré. C'est à propos des fonctions de plusieurs variables que j'ai été amené en 1933 à m'occuper de la théorie des groupes. Enfin, depuis un an, mon effort s'est porté sur la topologie générale et la théorie de l'intégration.

Dans l'analyse forcément incomplète qui va suivre, je m'attacherai surtout à dégager quelques idées essentielles. Renonçant à l'ordre chronologique, et même peut-être logique, je commencerai par les fonctions de plusieurs variables, auxquelles est consacrée la part la plus importante de mes travaux.

A - Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

Je classerai mes recherches sous trois rubriques principales : représentation pseudo-conforme, domaines d'existence, problèmes de Cousin-Poincaré. Il va sans dire qu'il n'y a pas de démarcation nette entre ces chapitres de la théorie; les relations qui existent entre eux en constituent même l'un des aspects les plus intéressants.

1.- Représentation pseudo-conforme.

Dans l'espace de n variables complexes, une transformation définie par un système de n fonctions analytiques indépendantes des n variables prend le nom de transformation pseudo-conforme (nom aujourd'hui consacré par l'usage). Le problème de la représentation pseudo-conforme consiste à classer les domaines[1] vis-à-vis de ces transformations.

En fait ce problème est très vaste et mal défini; dans cette question comme dans beaucoup d'autres, la difficulté consiste à poser le problème, et souvent on commence par le résoudre, au moins en partie, avant de savoir le formuler d'une façon précise.

Au moment où j'ai commencé à m'intéresser à la représentation pseudo-conforme, S. Bergmann venait d'indiquer une méthode qui permet, dans chaque classe de domaines équivalents (c'est-à-dire susceptibles d'être mis en correspondance biunivoque et pseudo-conforme), de choisir un domaine-type bien déterminé. Mais ce résultat était purement théorique, et basé

---

1) Il s'agit de domaines ouverts et connexes, étalés sur l'espace des n variables complexes, et non nécessairement univalents; ou, plus généralement, de domaines abstraits à connexion pseudo-conforme, tels qu'ils ont été définis, par exemple, par H. Weyl dans le cas $n = 1$.

sur l'existence d'un système orthogonal complet de fonctions que l'on ne savait pas construire en général. Quelle était la nature de ces domaines-types, pouvait-on les caractériser par des propriétés géométriques simples ? Précisément Carathéodory venait de montrer l'intérêt qui s'attachait aux domaines cerclés.[1] Etaient-ce des domaines types ? Quelle était la forme générale des transformations pseudo-conformes de ces domaines les uns dans les autres ? Comment caractériser les domaines applicables sur les domaines cerclés ? Autant de questions auxquelles j'ai pu répondre, ainsi qu'à d'autres, par une méthode qui est sans rapport avec celle de Bergmann.

En voici l'idée essentielle, qui remonte d'ailleurs à Poincaré : l'étude d'un domaine au point de vue pseudo-conforme doit comporter l'étude du groupe de toutes les transformations pseudo-conformes de ce domaine en lui-même.[2] Un domaine cerclé admet précisément, par définition, un groupe à un paramètre dans lequel un point (le "centre") reste fixe. Un premier problème consistera, pour un domaine quelconque D, à étudier le sous-groupe G (O) des transformations qui laissent fixe un point donné O de D. Voici les deux théorèmes fondamentaux que j'ai établis (23) au sujet de ce sous-groupe, dans le cas où D est borné[3]: le premier, c'est que les transformations linéaires tangentes en O aux transformations de G (O) forment un groupe isomorphe à G (O) , parce qu'à deux transformations distinctes de G (O) correspondent deux transformations linéaires distinctes. Le second, c'est qu'on peut toujours effectuer sur le domaine D une transformation pseudo-conforme (que j'indique explicitement) de manière à rendre le groupe G (O) linéaire.

Le premier de ces théorèmes m'a permis de démontrer en quelques lignes que toute correspondance biunivoque et pseudo-conforme entre deux domaines cerclés bornés, dans laquelle les centres se correspondent, est linéaire. Le deuxième théorème fondamental m'a conduit, dans le cas de deux variables, à déterminer tous les types de domaines bornés qui admettent une infinité de transformations laissant fixe un point intérieur (que nous appellerons "privilégié") ; et, grâce au premier théorème fondamental, j'ai obtenu la forme générale des transformations de ces domaines les uns dans les autres, lorsque les points " privilégiés " se correspondent.

Pour passer du cas de G (O) à l'étude du groupe G de toutes les transformations d'un domaine borné D en lui-même, une grosse difficulté restait à vaincre : alors que je savais que G (O) est un groupe de Lie (puisqu'on peut le rendre linéaire et que j'avais montré qu'il est compact), je savais seulement de G qu'il est localement compact (28, théorème 2), sans savoir s'il est de Lie ni même s'il est continu. Plus tard (15,33) j'ai pu démontrer que tout groupe localement compact de transformations pseudo-conformes est un groupe de Lie[4], au moins s'il est de dimension finie, ce qui est le cas pour le groupe G d'un domaine borné; on peut dès lors appliquer à l'étude du groupe G les méthodes de Lie et de ses successeurs.[5]

---

1) Un domaine cerclé ayant pour centre l'origine est un domaine de l'espace $x_1, \dots, x_n$ qui admet le groupe de transformations
$$x'_k = x_k e^{i\theta} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$
dépendant d'un paramètre réel θ ; on suppose en outre que l'origine appartient au domaine.

2) Groupe qui peut, dans certains cas, se réduire à la seule transformation identique.

3) Pour un domaine non borné, ces théorèmes ne sont pas vrais en général. On peut pourtant les étendre à certaines catégories de domaines non bornés, comme l'ont montré plus tard H. Behnke et ses élèves.

4) Voir plus loin la partie C de cet exposé.

5) E. Cartan a pu ainsi déterminer, pour 2 et 3 variables, tous les domaines bornés qui admettent un groupe transitif.

Avant d'avoir ce résultat, j'avais étudié directement le groupe G dans des cas particuliers (domaines cerclés [1], domaines semi-cerclés). J'avais pu ainsi classer définitivement, vis-à-vis des transformations pseudo-conformes, tous les domaines cerclés et semi-cerclés bornés de l'espace de 2 variables complexes [2] (26) . Ils n'admettent en général pas d'autre transformation que celles qui leur servent de définition; les domaines qui en admettent d'autres sont faciles à énumérer, et leurs groupes respectifs sont connus.

2 - Domaine d'existence et développements en séries.

Appelons domaine d'holomorphie (ou de méromorphie) un domaine D tel qu'il existe une fonction holomorphe (ou méromorphe) dans D qu'on ne puisse prolonger analytiquement dans aucun domaine plus grand. Il est bien connu, depuis F. Hartogs et E.E. Levi, qu'un domaine arbitraire dans l'espace de $n \geqslant 2$ variables complexes n'est pas toujours domaine d'holomorphie (ou de méromorphie).

La recherche de propriétés simples permettant de caractériser les domaines d'holomorphie constitue un des problèmes intéressants et difficiles de la théorie des fonctions de plusieurs variables. Elle est en rapport étroit avec l'étude des développements en séries et de leurs domaines de convergence. J'ai consacré plusieurs mémoires à préciser ces rapports, et cela m'a conduit (25) à introduire la notion, aujourd'hui classique, de " convexité " par rapport à une famille de fonctions.

J'ai montré que, dans un domaine "convexe", on peut, au moyen d'un produit infini à la Weierstrass, construire une fonction holomorphe admettant chaque point frontière du domaine comme point singulier essentiel. Tout domaine " convexe " est donc domaine d'holomorphie (et aussi de méromorphie). D'autre part tout domaine de convergence uniforme d'une série est " convexe ". Ces deux résultats, combinés avec mon théorème sur le développement d'une fonction holomorphe en série de polynomes homogènes dans un domaine cerclé (23), me permirent d'établir l'équivalence de toutes ces propriétés (savoir : domaine convexe, domaine d'holomorphie, domaine de convergence uniforme de fonctions d'un certain type), au moins pour les domaines cerclés et d'autres analogues.[3]

L'équivalence put être démontrée dans tous les cas le jour où P. Thullen eut réussi à établir que la convexité est une propriété qui appartient à tous les domaines d'holomorphie, et montré du même coup l'existence d'un plus petit domaine d'holomorphie[4] parmi tous ceux qui contiennent un

---

1) Ceci avec l'aide de E. Cartan.
2) Le cas plus particulier des domaines de Reinhardt avait été résolu peu auparavant par P. Thullen, avec une autre méthode.
3) La condition classique relative aux rayons de convergence associés d'une série multiple de Taylor est une conséquence immédiate, très particulière, de mes résultats.
4) Le domaine donné peut être univalent sans que le plus petit domaine d'holomorphie le soit, comme je l'ai montré dans une courte note (13), établissant en même temps l'existence de domaines univalents et homéomorphes à l'hypersphère dans lesquels les fonctions holomorphes ne peuvent pas toujours être développées en séries de polynomes.

domaine arbitrairement donné. En fait, j'avais déjà introduit (23) cette notion dans le cas des domaines cerclés, et j'avais établi les quelques théorèmes essentiels dont la démonstration put se transcrire sans changement dans le cas général, après la découverte de Thullen. Le Mémoire que j'ai écrit en collaboration avec Thullen est consacré à un exposé d'ensemble de toute la question, et la convexité y joue un rôle primordial. Elle permet de prouver l'identité des domaines étudiés par G. Julia (domaines de normalité d'une famille de fonctions holomorphes) avec ceux étudiés autrefois par E.E. Levi (domaines de méromorphie), ce qui résout une fois pour toutes le problème soulevé par le mémoire connu[1] de G. Julia.

Le pont entre la théorie de la représentation pseudo-conforme et celle des domaines d'existence est constitué par le théorème fondamental que voici (23, 25, 27) : toute correspondance biunivoque et pseudo-conforme entre deux domaines D et D' se prolonge en une correspondance biunivoque et pseudo-conforme entre les plus petits domaines d'holomorphie contenant respectivement D et D'. En particulier, le groupe d'un domaine D laisse invariant le plus petit domaine d'holomorphie qui contient D. J'en ai déduit un procédé de construction de domaines dont le groupe se réduit à la seule transformation identique.

D'autre part, le théorème ci-dessus permet, comme je l'indiquais tout récemment dans une conférence à l'Université de Münster (Westphalie), de poser les bases d'une théorie invariante des domaines d'holomorphie, théorie dont C.Carathéodory montrait la nécessité dans sa conférence au Congrès des Mathématiciens (Zürich, 1932).

3.- Problèmes de Cousin - Poincaré.

En gros, le premier problème de Cousin consiste à chercher une fonction méromorphe dans un domaine D, lorsqu'on se donne arbitrairement les parties infinies de cette fonction[2]. Le deuxième problème de Cousin consiste à chercher une fonction holomorphe qui s'annule sur des variétés données et ne s'annule pas ailleurs. Enfin, le problème de Poincaré consiste à mettre une fonction méromorphe dans D sous la forme de quotient de deux fonctions holomorphes dans D et premières entre elles. La solution du second problème de Cousin entraîne d'ailleurs celle du problème de Poincaré.

En fait, Poincaré et Cousin ont seulement démontré que ces problèmes sont possibles dans le cas très particulier où D est le produit topologique de domaines situés respectivement dans les plans des n variables complexes[3]. En dehors de ce résultat, on ne savait pratiquement rien; on ne savait même pas si les problèmes en question pouvaient se résoudre pour l'hypersphère.

Or, dès 1931, j'indiquais dans une conférence en Allemagne des exemples de domaines dans lesquels les problèmes de Cousin cessent d'être possibles : je profitais du fait que ces domaines n'étaient pas des domaines d'holomorphie pour mettre en

---

1) Acta Mathematica, 47, 1926, p. 53 - 115.
2) D'une façon précise, la fonction cherchée doit, au voisinage de chaque point de D, ne différer d'une fonction méromorphe donnée en ce point, que par une quantité holomorphe.
3) Avec une restriction que Cousin n'avait pas aperçue : le deuxième problème de Cousin et le problème de Poincaré peuvent ne pas avoir de solution si deux au moins des domaines composants sont multiplement connexes (Gronwall).

évidence l'impossibilité d'une solution. La question était donc posée de caractériser les domaines pour lesquels ces problèmes sont possibles.

Cousin avait obtenu ses résultats grâce à l'intégrale classique de Cauchy. L'intégrale d'A. Weil [1], qui généralise celle de Cauchy, me permit de résoudre le premier problème de Cousin pour tous les domaines univalents qui sont " convexes" par rapport à la famille des polynomes ou des fonctions rationnelles (la convexité dont il s'agit ici est celle dont j'ai parlé plus haut à propos des domaines d'existence). J'en déduisis la solution des deux problèmes de Cousin pour tous les domaines cerclés (en particulier, les trois problèmes se trouvaient résolus pour l'hypersphère). Ces résultats et quelques autres furent annoncés dans une Note aux Comptes Rendus (17), mais leur publication en fut retardée, et j'y ai renoncé depuis que K. Oka a publié, en 1936 et 1937 [2], des résultats plus complets, obtenus par une méthode fort originale : d'après Oka, le premier problème de Cousin peut se résoudre pour tous les domaines d'holomorphie univalents [3]. On connaît ainsi une condition suffisante pour que le premier problème de Cousin puisse être résolu. Or je savais (17) que cette condition est nécessaire [4], au moins dans le cas de deux variables. Il est remarquable que pour trois variables, il n'en soit plus de même, comme je m'en suis aperçu tout récemment [5].

Je ne parle pas de la caractérisation des domaines pour lesquels le deuxième problème de Cousin ou le problème de Poincaré peuvent être résolus. La question est encore trop peu avancée. J'espère en tout cas avoir montré ici les liens importants qui existent entre la théorie des domaines d'holomorphie et l'étude desproblèmes de Cousin - Poincaré.

Je voudrais dire encore que la solution du premier problème de Cousin entraîne celle d'un autre problème : celui qui consiste à trouver une fonction holomorphe dans le domaine envisagé, lorsqu'on se donne arbitrairement les valeurs [6] de cette fonction sur une variété analytique à (n-1) dimensions complexes partout régulière dans le domaine. J'avais mis ce fait en évidence (21) dès 1930, et Oka s'en est servi pour arriver à la solution générale du premier problème de Cousin.

Faute de place, je ne parle pas ici de mes recherches sur la convergence des suites de transformations (30,37), sur l'itération des transformations pseudo-conformes (28), sur les points " exceptionnels " d'une transformation pseudo-conforme (31), sur les transformations pseudo-conformes du produit topologique de deux domaines à p et n dimensions (16,34), ni de mes recherches plus récentes et non encore publiées sur les domaines de méromorphie.

B - Fonctions analytiques d'une variable complexe

Ma Thèse (20) était consacrée à la recherche d'un critère de famille complexe normale (au sens de P. Montel) pour les systèmes de fonctions qui satisfont à une identité de Borel,

---

1) Comptes Rendus, 194, 1932, p. 1304.
2) Journal of Science of the Hirosima University.
3) Là encore, la notion de " convexité " joue un rôle important.
4) D'une façon précise, le premier problème de Cousin ne peut pas être résolu pour d'autres domaines que les domaines d'holomorphie.
5) Le domaine
$$|x|<1, \quad |y|<1, \quad |z|<1,$$
privé du point $x=y=z=0$, n'est pas un domaine d'holomorphie, et pourtant le premier problème de Cousin y est toujours soluble.
6) Ces valeurs devant former, bien entendu, une fonction holomorphe sur la variété.

systèmes déjà étudiés par A. Bloch. Je parlerai seulement ici d'une question que j'ai dû aborder dans ma Thèse à titre accessoire : il s'agissait d'étendre au cas de n dimensions un théorème de P. Boutroux relatif au cas d'une dimension. La nécessité de cette extension, au moins pour $n = 2$, était apparue à A.Bloch qui n'avait pu trouver de démonstration. Le théorème que j'ai établi dans ma Thèse s'est révélé un instrument précieux chaque fois qu'il s'agit d'étudier la répartition des valeurs d'une fonction analytique; il a été utilisé notamment par Vl. Bernstein, H.Milloux, G. Valiron. De plus ma démonstration permettait une généralisation que j'ai aussi indiquée dans ma Thèse et qui a permis à L.Ahlfors d'obtenir d'intéressants résultats concernant les fonctions de croissance de Nevanlinna.

Dans l'ordre d'idées du sujet principal de ma Thèse, je suis revenu plus tard (7,29) sur les systèmes de p fonctions holomorphes et leurs combinaisons linéaires "exceptionnelles", déjà étudiés par P. Montel[1] et R. Nevanlinna[2]. J'ai obtenu une inégalité qui ne semble guère pouvoir être améliorée : elle limite la croissance des rapports mutuels des fonctions données à l'aide des zéros de certaines combinaisons linéaires (en nombre fini) de ces fonctions. Cette inégalité joue si l'on veut, vis-à-vis du théorème de Borel sur les identités

$$\sum P_i(x)\, e^{Q_i(x)} = 0$$

(où les P_i sont des polynômes et les Q_i des fonctions entières), le même rôle que l'inégalité classique de Nevanlinna vis-à-vis du célèbre théorème de Picard. J'en signale une conséquence curieuse : on savait, depuis G. Pólya, qu'étant données deux fonctions entières sans zéros $f(x)$ et $g(x)$, telles que $g(x)$ ne soit identique ni à $f(x)$ ni à $1/f(x)$, les fonctions

$$f(x) - 1 \quad \text{et} \quad g(x) - 1$$

ne peuvent avoir les mêmes zéros; or j'obtiens le résultat suivant : les zéros communs à ces deux fonctions constituent tout au plus la moitié de tous leurs zéros réunis[3]; et ce résultat ne peut pas être amélioré, comme le montre un exemple simple.

Je passe ici sous silence mes théorèmes d'unicité (3,7,20,29), dont une partie a été trouvée indépendamment par R. Nevanlinna, ainsi que mes recherches sur les fonctions de croissance (4,5,6) et sur les valeurs exceptionnelles d'une fonction entière (10).

C - Groupes de transformations analytiques

J'ai expliqué[4] comment j'avais été amené à m'occuper des groupes de transformations analytiques. Dans le Mémoire (33), j'étudie un noyau de groupe de transformations définies par n fonctions analytiques de n variables (fonctions et variables étant soit réelles, soit complexes). Je cherche des conditions assez larges qui permettent d'affirmer qu'un tel noyau G est un noyau de groupe de Lie.[5] Or il faut évidemment que le groupe

---

1) Voir par exemple P. MONTEL, Leçons sur les familles normales, etc..., Chapitre X (Collection Borel, Gauthier-Villars 1927).
2) R.NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel, etc..., chapitre V (Collection Borel, Gauthier - Villars 1929).
3) Cet énoncé n'a évidemment aucun sens précis; c'est une image à la place d'un énoncé précis que nous ne pouvons donner ici.
4) Voir ci-dessus, A, § 1.
5) Cela signifie : 1° que les transformations de G dépendent de paramètres continus en nombre fini; 2° que les fonctions qui définissent les transformations de G sont analytiques non seulement par rapport aux variables sur lesquelles elles opèrent, mais par rapport aux paramètres.

soit localement compact : nous supposerons donc que le noyau G est compact. Une autre condition nécessaire est que G soit de dimension finie (donc que les transformations de G soient en correspondance biunivoque et bicontinue avec un ensemble fermé borné d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions). Je montre que ces deux conditions sont suffisantes, moyennant une condition supplémentaire (nécessaire elle aussi) qui exprime une sorte de dérivabilité discontinue [1]. Cette condition supplémentaire est trivialement vérifiée pour un sous-groupe d'un groupe de Lie, ce qui me redonne un théorème de E. Cartan [2], lui-même plus général qu'un théorème de J. von Neumann sur les groupes de transformations linéaires. Mais il y a plus, et c'est le résultat essentiel : cette espèce de condition de dérivabilité est vérifiée pour tous les noyaux (relativement compacts) de groupes de transformations analytiques complexes. D'où le théorème fondamental :

Tout noyau de groupe de transformations pseudo-conformes qui est compact et de dimension finie est un noyau de groupe de Lie, et, en particulier, dépend continûment de paramètres (ou se réduit à la seule transformation identique).

Je rappelle à ce propos qu'on ne sait pas encore aujourd'hui si un noyau de groupe abstrait, compact et de dimension finie, est un noyau de groupe de Lie. Le saurait-on, cela n'entraînerait pas immédiatement le théorème ci-dessus; il faudrait une démonstration, que j'ai d'ailleurs donnée (14).

D. Topologie

A part un petit travail (30) qui date de 1933 et où, entre autres, je démontrais un résultat fort simple sur les " chemins de détermination " qui rend évident un théorème connu d'Hadamard [3], ma contribution à la topologie consiste dans l'introduction que j'ai faite récemment de la notion de "filtre" (18,19). A vrai dire, cette notion doit être considérée, selon moi, comme antérieure à toute notion topologique; mais les filtres semblent appelés à jouer un rôle important en topologie générale, car ils permettent d'éliminer définitivement de cette branche des mathématiques la considération des suites dénombrables [4]. Or tout ce que nous avons appris, depuis les travaux initiaux de Fréchet et Hausdorff jusqu'aux recherches actuelles de l'Ecole polonaise et de l'Ecole russe, nous a montré que le dénombrable n'est pas à sa place dans les espaces topologiques les plus généraux, espaces dont la considération non seulement présente un intérêt philosophique, mais est indispensable au développement de l'analyse. Précisément les filtres permettent d'arriver à la notion générale de limite dont le besoin se faisait sentir si l'on en juge par les tentatives de ces dernières années (par exemple la limite généralisée de Banach).

Avec la notion d'ultrafiltre qui vient compléter celle de filtre, la théorie des espaces compacts [5] reçoit de nombreuses

---

1) Propriété (P) , p. 38 du Mémoire cité (33).

2) La Théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, p.22-24 (Mémorial des Sc. Math., XLII)

3) Sur les transformations ponctuelles (Bul. Soc. Math.de France, 34, 1906, p. 71 - 81).

4) La notion de suite dénombrable rentre comme cas particulier dans celle de filtre.

5) Bicompacts dans la terminologie d'Alexandroff-Urysohn.

simplifications. Il en est de même de la démonstration du théorème de Haar sur l'existence d'une mesure invariante dans les espaces de groupes topologiques localement compacts.

Enfin la récente théorie des " espaces uniformes " d'A. Weil (1) prend presque un caractère intuitif si on remarque qu'une structure uniforme, sur un espace E, est définie au moyen d'un filtre convenable sur l'ensemble E x E des couples d'éléments de E. De même qu'un espace métrique peut être rendu " complet " par l'adjonction d'éléments fictifs qui sont des " suites de Cauchy ", de même un espace uniforme général peut être complété par l'adjonction d'éléments fictifs qui sont des " filtres de Cauchy ".

Il est sans doute encore trop tôt pour pouvoir juger aujourd'hui du rôle qu'est appelé à jouer une notion qui n'est vieille de quelques mois. En tout cas il me semble que cette notion se rencontre un peu partout en analyse, et je crois qu'il y a intérêt à la mettre en lumière.

E - Intégration.

Diverses tentatives ont été faites, ces dernières années, pour étendre la théorie de Lebesgue d'une part aux espaces abstraits (l'initiative en revient, je crois, à M. Fréchet), d'autre part aux espaces topologiques généraux (Radon). Ces tentatives ne sont pas encore satisfaisantes, et il nous manque une vue d'ensemble. On peut se faire une idée de l'énorme diversité de notions et de tendances qui règne actuellement, en parcourant le livre de Saks ; les recherches plus récentes de de Possel ne semblent pas encore avoir conduit à une théorie unitaire et suffisamment compréhensive. Je n'ai pas la prétention d'y être arrivé; mais je voudrais indiquer ici la ligne directrice de mes efforts actuels, et signaler quelques résultats encore inédits.

Tout d'abord, la théorie de la mesure et de l'intégration sur un espace localement compact (2), telle qu'elle existait jusqu'à ce jour, était peu satisfaisante, car en dehors du cas d'un espace métrique, on ne savait comment caractériser une " mesure de Radon "; les méthodes existantes (celle de Carathéodory par exemple) ne permettent pas, en effet, de mesurer tous les ensembles compacts, ou tous les ensembles ouverts relativement compacts. Or ce fait est en relation avec le suivant : une fonction semi-continue inférieurement n'est pas toujours la limite d'une suite dénombrable croissante de fonctions continues. On croit généralement que le dénombrable joue un rôle privilégié dans le problème de l'intégration: c'est vrai en grande partie, mais on s'est exagéré ce rôle, peut-être sous l'influence de la célèbre classification de Baire - Borel. Je me suis aperçu que rien n'empêche (en ce qui concerne notre objet actuel) de remplacer les suites dénombrables par des filtres généraux; on peut alors définir, entre autres, l'intégrale de toutes les fonctions semi-continues (inférieurement ou supérieurement) et la mesure de tous les ouverts et de tous les compacts. Il devient alors possible de caractériser ce que j'appelle encore une "mesure de Radon" dans un espace localement compact général.

---

1) Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg (n° 551 des Actualités scientifiques, Hermann 1937)
2) Localement bicompact dans la terminologie d'Alexandroff-Urysohn.

D'autre part, les notions conjuguées de filtre et de structure uniforme (au sens de Weil) permettent d'appliquer aux fonctions continues (nulles en dehors d'un compact) le procédé de sommation de Cauchy-Riemann-Stieltjès; puis de mettre définitivement au point un projet que j'avais conçu il y a quelques années. Voici la question : une fonctionnelle $\alpha \geqslant 0$ étant donnée sur une famille Φ de sous-ensembles[1] et satisfaisant sur Φ à l'inégalité

$$\alpha(E+F) \leqslant \alpha(E)+\alpha(F),$$

trouver à quelles conditions il existe une mesure de Radon pour laquelle les ensembles de Φ sont mesurables, et qui soit au moins égale à α sur chacun d'eux. Ces conditions se formulent très simplement; si elles sont remplies, il existe, parmi toutes les mesures de Radon au moins égales à α, une mesure plus petite que toutes les autres. L'intégrale, par rapport à cette mesure, d'une fonction continue est donnée par le procédé de Cauchy-Stieltjès appliqué à α. Ces propriétés, et beaucoup d'autres, font rentrer dans une seule théorie la théorie des fonctions à variation bornée, celle de la rectification des courbes, de la mesure de l'aire des surfaces gauches, etc... Par exemple, l'aire d'une surface est définie comme la plus petite mesure de Radon au moins égale, sur chaque ensemble de Borel, à la mesure de la projection orthogonale de cet ensemble sur n'importe quel plan (l'existence d'une telle mesure de Radon signifie précisément que la surface est quarrable).

Disons maintenant quelques mots de l'intégration abstraite. On y caractérise axiomatiquement la mesure, l'intégrale, sans se préoccuper de la nature de l'espace sur lequel on intègre. Les problèmes à résoudre sont alors essentiellement des problèmes de prolongement : prolongement d'une fonction simplement additive d'ensemble en une mesure, prolongement d'une mesure en une intégrale, etc... Il faut poser convenablement, puis résoudre des problèmes de prolongement. Voici l'idée de ma méthode : le théorème de Fischer-Riesz, qui affirme que l'espace des fonctions sommables est complet une fois pourvu de la métrique déduite de l'intégrale ellemême, nous montre, je crois, la véritable raison d'être de l'intégrale de Lebesgue. Mais, tandis que ce théorème présuppose une théorie des fonctions sommables, je procède en sens inverse. Je pars d'un théorème fort général et fort simple sur les espaces vectoriels normés; et je montre que tous les problèmes de prolongement se ramènent à l'opération suivante : prendre, dans un espace vectoriel normé complet, la fermeture d'un sous-espace linéaire donné. Le théorème de Fischer-Riesz devient alors évident, ainsi que le procédé de sommation de Lebesgue.

J'ajoute que cette méthode permet de faire aussi facilement la théorie lorsque les fonctions à intégrer prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel normé complet quelconque, et même dans un espace vectoriel topologique non normé, pourvu qu'il soit localement convexe et faiblement complet[2]. Il y a plus : la théorie s'étend au cas où la mesure prend ses valeurs dans un espace vectoriel normé ou non normé (localement convexe). Ma théorie embrasse donc les intégrales (simples ou doubles) qui servent à donner les décompositions spectrales des opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert.

---

1) Je fais sur Φ les hypothèses suivantes: la réunion de deux ensembles de Φ appartient à Φ ; de même pour l'intersection et pour la différence. En outre, je suppose que tout sous-ensemble compact peut être entièrement recouvert par un nombre fini d'ensembles de Φ arbitrairement petits (cette dernière expression étant susceptible d'un sens précis, même lorsque l'espace n'est pas pourvu d'une métrique).

2) Tel est le cas, p.ex., de l'espace de Hilbert muni de la topologie faible.